例題 42

別解　格子点の数で解く

(2)

2 つの箱から取り出したカードの数字をそれぞれ a,b とすると，

$X=k$ ならば $a+b=k$

ここで xy 座標平面上に座標 (a,b) をとると，

(a,b) は $x+y=k$，$1\le x\le n$，$1\le y\le n$ を満たす格子点である。

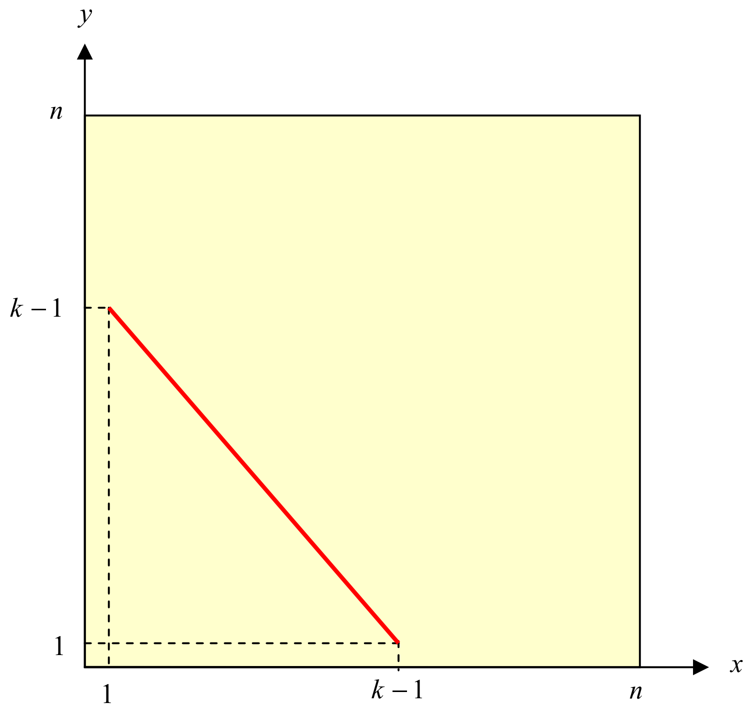
また，a,b の総数，すなわち全格子点の数は n^2

$2\le k\le n$ のとき

$x+y=k$，$1\le x\le n$，$1\le y\le n$ を満たす格子点の数は，下図より，$k-1$

これと全格子点の数が n^2 であることから，

$X=k$ となる確率 $=\dfrac{k-1}{n^2}$

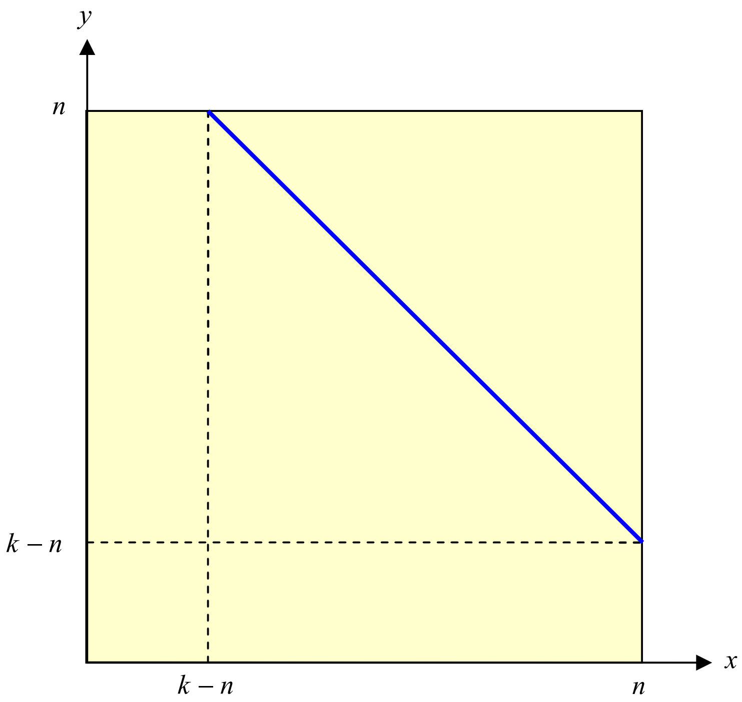


$n+1 \le k \le 2n$ のとき

$x+y=k$, $1 \le x \le n$, $1 \le y \le n$ を満たす格子点の数は, 下図より, $n-(k-n)+1=2n-k+1$

これと全格子点の数が n^2 であることから,

$X=k$ となる確率$=\dfrac{2n-k+1}{n^2}$



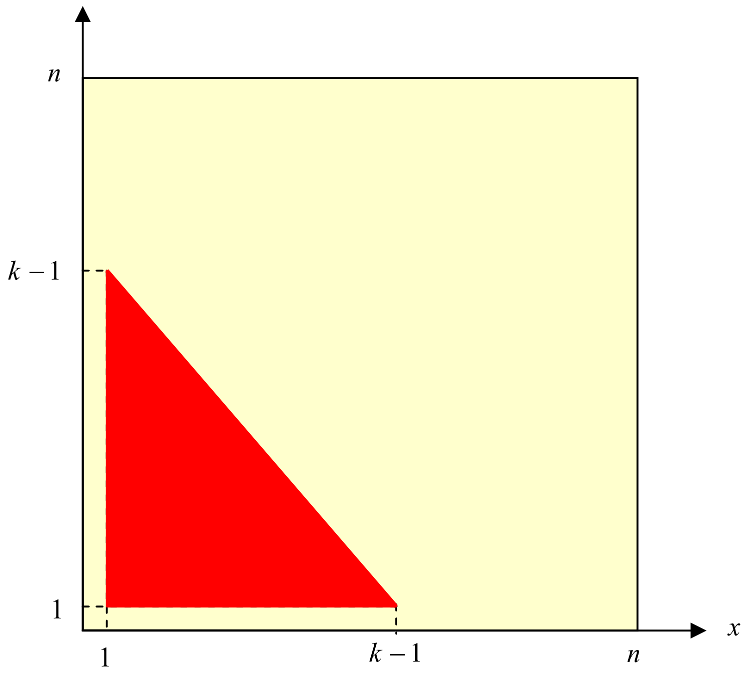
以上より,

$$R(k)=\begin{cases}\dfrac{k-1}{n^2} & (2 \le k \le n) \\ \dfrac{2n-k+1}{n^2} & (n+1 \le k \le 2n)\end{cases}$$

(3)

$2 \leq k \leq n$ のとき

$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{k-1}{n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{k-1} i$$
$$=\frac{k(k-1)}{2n^2}$$



$n+1 \leq k \leq 2n$ のとき

$x+y \leq k$， $1 \leq x \leq n$， $1 \leq y \leq n$ を満たす格子点は，

下図の緑色部分の格子点を除いた格子点である。

緑色部分の格子点の数は，

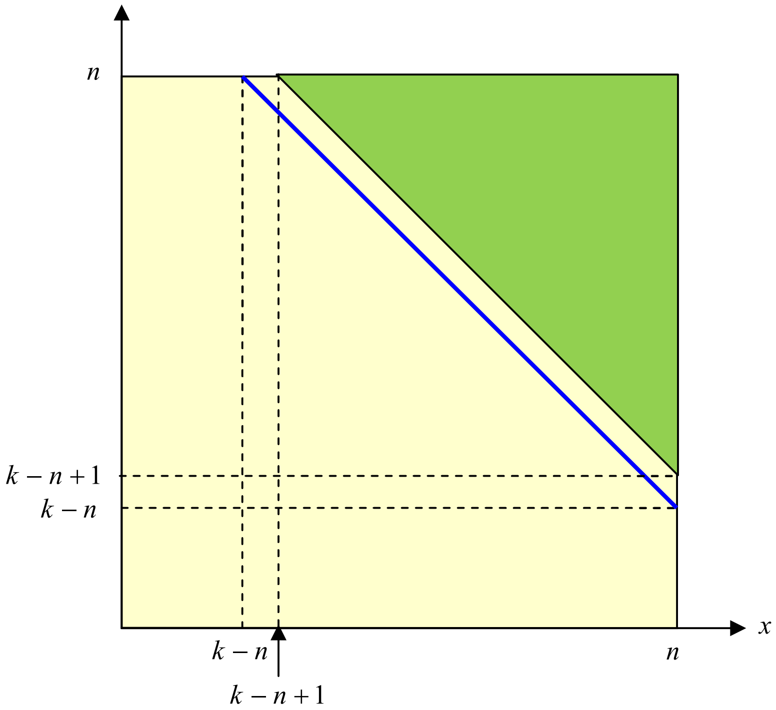
$$\{n-(k-n+1)+1\}+\{n-(k-n+2)+1\}+\cdots+1=(2n-k)+(2n-k-1)+\cdots+1$$
$$=\sum_{i=1}^{2n-k} i$$
$$=\frac{(2n-k)(2n-k+1)}{2}$$
$$=\frac{k^2-(4n+1)k+4n^2+2n}{2}$$

よって， $x+y \leq k$， $1 \leq x \leq n$， $1 \leq y \leq n$ を満たす格子点の数は，

$$n^2-\frac{k^2-(4n+1)k+4n^2+2n}{2}=\frac{-k^2+(4n+1)k-4n^2-2n}{2}$$

これと格子点の総数が n^2 であることから，

$x+y\leq k$， $1\leq x\leq n$， $1\leq y\leq n$ となる確率は， $\dfrac{-k^2+(4n+1)k-4n^2-2n}{2n^2}$



以上より， $S(k)=\begin{cases}\dfrac{k(k-1)}{2n^2} & (2\leq k\leq n)\\ \dfrac{-k^2+(4n+1)k-2n^2-2n}{2n^2} & (n+1\leq k\leq 2n)\end{cases}$